Dérivation des équations de Reynolds à partir des équations de Navier-Stokes

Vladislav A. Yastrebov

MINES Paris, PSL University, Centre des Matériaux, CNRS UMR 7633, Evry, France

22 mars 2023

1 Normalisation des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$) s'écrit comme

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\mu}{\rho}\Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

où $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ est le champ vectoriel de vitesse, ρ la densité constante et uniforme, μ la viscosité de fluide (Pa·s) et $\boldsymbol{f}$ est la densité des efforts volumiques. En notant $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$, en supposant que des efforts volumiques proviennent de la gravité avec la pesanteur g dans une direction quelconque, et en réécrivant ces équations composante par composante on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g\alpha_x, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} & = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + g\alpha_y, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \left(u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} & = \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g\alpha_z, \end{cases} \tag{3}$$

avec des coefficients α_i 1 tels que $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$ et déterminant la projection de l'accélération du pesanteur sur les axes OX, OY, OZ. Ces équations peuvent être simplifiées dans le cas où l'écoulement de fluide se passe en couche mince d'épaisseur caractéristique h_0 (dans la direction OZ) et dans le plan XY sur une distance caractéristique L avec $h_0 \ll L$. Commençons par l'introduction des variables adimensionnelles pour les coordonnées et les vitesses :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{h_0}, \\ u' &= \frac{u}{U_0}, \quad v' = \frac{v}{U_0}, \quad w' = \frac{w}{V_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

où U_0 et V_0 sont des vitesses caractéristiques dans le plan XY et dans la direction V_0, respectivement. Logiquement, la vitesse caractéristique dans le plan d'écoulement U_0 doit être plus importante que dans la direction de l'épaisseur de la couche V_0, pour le montrer l'on réécrit l'équation (2) avec des variables normalisées on obtient :

$$\frac{U_0}{L}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right) + \frac{V_0}{h_0}\frac{\partial w'}{\partial z'} = 0. \tag{5}$$

Les dérivés des vitesses normalisées par les coordonnées normalisés varient de la même façon, pour donner donc le même poids à toutes les composantes, il faut demander que $U_0/L \sim V_0/h_0$; on peut donc choisir :

$$V_0 = U_0\frac{h_0}{L}. \tag{6}$$

Le temps caractéristique est associé avec ce ratio :

$$t_0 = \frac{L}{U_0} \tag{7}$$

La pression p ainsi que le temps t seront aussi normalisés :

$$p' = \frac{p}{p_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}. \tag{8}$$

En remplaçant toutes les variables dans les équations (3) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{U_0}{t_0}\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U_0^2}{L}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \frac{p_0}{\rho L}\frac{\partial p'}{\partial x'} & = \frac{\mu U_0}{\rho L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\mu U_0}{\rho h_0^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + g\alpha_x, \\ \frac{U_0}{t_0}\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{U_0^2}{L}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \frac{p_0}{\rho L}\frac{\partial p'}{\partial y'} & = \frac{\mu U_0}{\rho L^2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\mu U_0}{\rho h_0^2}\frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + g\alpha_y, \\ \frac{U_0 h_0}{t_0 L}\frac{\partial w'}{\partial t'} + \frac{U_0^2 h_0}{L^2}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) + \frac{p_0}{h_0\rho}\frac{\partial p'}{\partial z'} & = \frac{\mu U_0 h_0}{L^3\rho}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\mu U_0}{L h_0 \rho}\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} + g\alpha_z, \end{cases} \tag{9}$$

Équation dans le "plan" : En multipliant les deux premières équations de (9) par $\rho h_0^2/(\mu U_0)$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\rho h_0^2}{\mu t_0}\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\rho h_0^2 U_0}{\mu L}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \frac{h_0^2 p_0}{\mu U_0 L}\frac{\partial p'}{\partial x'} & = \frac{h_0^2}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \frac{\rho h_0^2 g}{\mu U_0}\alpha_x, \\ \frac{\rho h_0^2}{\mu t_0}\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{\rho h_0^2 U_0}{\mu L}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \frac{h_0^2 p_0}{\mu U_0 L}\frac{\partial p'}{\partial y'} & = \frac{h_0^2}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \frac{\rho h_0^2 g}{\mu U_0}\alpha_y \end{cases} \tag{10}$$

Pour ne pas perdre le terme contenant le gradient de la pression, on devrait choisir la pression de référence de telle manière que $h_0^2 p_0 \sim \mu U_0 L$, i.e.

$$p_0 = \frac{\mu U_0 L}{h_0^2}. \tag{11}$$

En même temps, on remplace t_0 par L/U_0 et on note le petit paramètre $\epsilon = h_0/L \ll 1$ et l'on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon^2\frac{\rho U_0 L}{\mu}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x'} & = \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \epsilon^2\frac{\rho U_0 L}{\mu}\frac{Lg}{U_0^2}\alpha_x, \\ \epsilon^2\frac{\rho U_0 L}{\mu}\left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'} & = \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \epsilon^2\frac{\rho U_0 L}{\mu}\frac{Lg}{U_0^2}\alpha_y, \end{cases} \tag{12}$$

Le facteur adimensionnel devant l'accélération s'appelle le *nombre de Reynolds* :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu}, \tag{13}$$

qui représente le rapport de l'inertie par rapport à la viscosité. Les deux facteurs devant la direction des efforts volumiques, sont le nombre de Reynolds et l'autre nombre adimensionnel qui s'appelle le *nombre de Froude* est donné par :

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_0^2}{Lg} \tag{14}$$

qui caractérise le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentiel due à la gravité. En prenant en compte tous ces nombres, l'on obtient l'équation finale dans le plan XY :

$$\begin{cases} \epsilon^2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x'} & = \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + \epsilon^2\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\alpha_x, \\ \epsilon^2\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'} & = \epsilon^2\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \epsilon^2\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\alpha_y, \end{cases} \tag{15}$$

Pour le cas où le nombre de Reynolds reste petit tel que $\epsilon^2\mathrm{Re} \ll 1$ et si la contribution gravitationnelle reste de l'ordre de un $1/\mathrm{Fr} \sim 1$ (en effet, ce terme est multiplié par $\epsilon^2\mathrm{Re}$), alors pour $\epsilon \to 0$, les équations (15) se réduisent à des termes qui ne contiennent pas ϵ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p'}{\partial x'} &= \dfrac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}, \\ \dfrac{\partial p'}{\partial y'} &= \dfrac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}, \end{cases} \tag{16}$$

Équation dans l'épaisseur : En prenant en compte toutes les normalisations évoquées cidessus, la 3e équation de (9) par

$$\frac{U_0^2 h_0}{L^2}\frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{U_0^2 h_0}{L^2}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)+\frac{\mu U_0 L}{h_0^3\rho}\frac{\partial p'}{\partial z'}=\frac{\mu U_0 h_0}{L^3\rho}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right)+\frac{\mu U_0}{L h_0 \rho}\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}+g\alpha_z \tag{17}$$

En se focalisant sur le gradient de pression $\partial p'/\partial z'$, on multiplie le tout par $h_0^3\rho/(\mu U_0 L)$, on obtient l'équation finale dans la direction d'épaisseur OZ :

$$\epsilon^4\mathrm{Re}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)+\frac{\partial p'}{\partial z'}=\epsilon^4\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right)+\epsilon^2\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}+\epsilon^3\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\alpha_z \tag{18}$$

On peut constater que, sous les hypothèses introduites avant que $\epsilon^2\mathrm{Re} \ll 1$ et $1/\mathrm{Fr} \sim 1$ ou plus grand, il n'y a qu'un seul terme qui n'est pas multiplié par le petit paramètre ϵ :

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = 0. \tag{19}$$

On en déduit donc que la pression reste uniforme dans l'épaisseur. Si, par contre, le terme lié à la gravite reste important, la pression sera une fonctionne affine de la coordonnée z :

$$\frac{\partial p'}{\partial z'} = \epsilon^3\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\alpha_z \quad \Rightarrow \quad p' = \epsilon^3\alpha_z\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}z' \quad \Leftrightarrow \quad p = p_0 + \rho g\alpha_z z \tag{20}$$

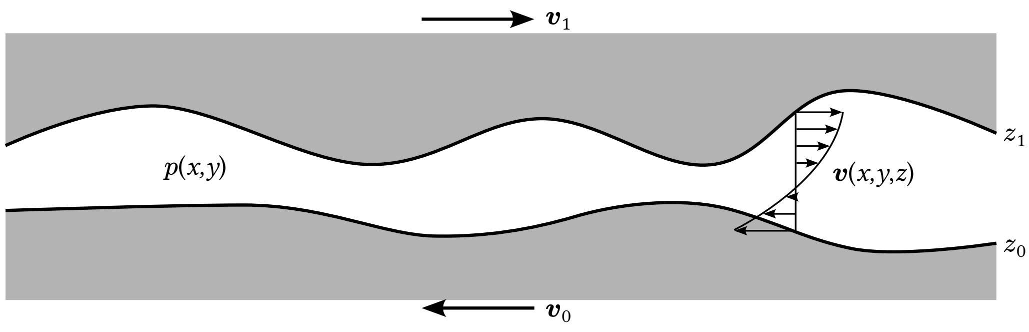

FIGURE 1 – Écoulement en couche mince entre deux parois.

2 Equation de Reynolds pour l'écoulement en couche mince

En sachant que la pression ne dépend pas de coordonnées z (cf. (19)), les équations (21) sont faciles à intégrées pour montrer que :

$$\begin{cases} u' = \dfrac{z'^2}{2}\dfrac{\partial p'}{\partial x'} + f_u(x',y',t')z' + g_u(x',y',t'), \\ v' = \dfrac{z'^2}{2}\dfrac{\partial p'}{\partial y'} + f_v(x',y',t')z' + g_v(x',y',t'), \end{cases} \tag{21}$$

Pour l'écoulement en couche mince limitée par deux surfaces $z_0(x,y) \le z \le z_1(x,y)$ (cf. Fig. 1 : Les conditions aux limites qui déterminent les fonctions f_u, g_u, f_v, g_v peuvent être différentes :

1. Surface libre (absence de cisaillement) sur $z' = z_0'(x',y')$ ou $z' = z_1'(x',y')$: $\dfrac{\partial u'}{\partial z'} = \dfrac{\partial v'}{\partial z'} = 0$

2. Adhérence à un paroi sur $z' = z'_0(x', y')$ où $z' = z'_1(x', y')$: $u'(z'_0, z'_1) = U'$ et $v'(z'_0, z'_1) = V'$ où $\{U', V'\}$ sont des composantes de la vitesse normalisée du paroi en question.

Quelques soient les conditions aux limites, on voit dans (21) que la vitesse dans l'épaisseur est décrite par un polynôme d'ordre deux. À noter, que cela reste vrai même si on n'ignore pas le dernier terme contenant le nombre de Froude Fr.

Intéressons nous au cas d'écoulement entre deux parois rigides $z'_0 = 0$ et $z'_1 = h'(x, y, t) > 0$, où $h' = h/h_0$ et $h(x, y)$ est l'épaisseur du film. Les parois sont donc espacés en moyenne de h_0 et ils se déplacent à des vitesses $\boldsymbol{v}'_0 = u'_0\boldsymbol{e}_x + v'_0\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{v}'_1 = u'_1\boldsymbol{e}_x + v'_1\boldsymbol{e}_y$, respectivement. Formulé de cette manière, les équations résultantes sont utilisées pour décrire la lubrification, l'écoulement dans des milieux fissurés (roches) et l'étanchéité des systèmes. À partir de l'équation (21) avec des conditions de collage pur on obtient que $u'(0) = u'_0$, donc $g_u = u'_0$ et $v'(0) = v'_0$, donc $g_v = v'_0$, pour $u'(h') = u'_1$ et $v'(h') = v'_1$, on obtient $f_u = (u'_1 - u'_0)/h' - 0.5h'\partial p'/\partial x'$ et $f_v = (v'_1 - v'_0)/h' - 0.5h'\partial p'/\partial x'$. Finalement, la vitesse de fluide entre deux parois est donnée par :

$$\boldsymbol{v}'(z) = \frac{z'}{2}(z' - h')\nabla' p' + \frac{z'}{h'}(\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_0) + \boldsymbol{v}_0, \tag{22}$$

où $\nabla' = \partial/\partial x'\boldsymbol{e}_x + \partial/\partial y'\boldsymbol{e}_y$. En intégrant cette vitesse sur l'épaisseur on obtient les composantes du flux $\boldsymbol{q}' = q'_x\boldsymbol{e}_x + q'_y\boldsymbol{e}_y$:

$$\begin{aligned} q'_x &= \int_{z'_0}^{z'_1} u(z')dz = -\frac{h'^3}{12}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{h'}{2}(u'_1 + u'_0), \\ q'_y &= \int_{z'_0}^{z'_1} v(z')dz = -\frac{h'^3}{12}\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{h'}{2}(v'_1 + v'_0) \end{aligned} \tag{23}$$

on a utilisé le fait que $z'_0 = 0$ et $z'_1 = h'$. D'où le vecteur de flux est donnée par :

$$\boldsymbol{q} = -\frac{h'^3}{12}\nabla' p' + \frac{h'}{2}(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1) \tag{24}$$

La conservation de la masse implique que la divergence du flux $\nabla \cdot \boldsymbol{q}$ doit être compensé par le changement du volume (hauteur) $\partial h/\partial t$, i.e.

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \boldsymbol{q}' = 0. \tag{25}$$

Pour expliciter le premier terme, on part de la dérivée temporelle de la hauteur :

$$\frac{dh'}{dt'} = w'_1 - w'_0 = \frac{\partial h'}{\partial t'} + (u'_1 + u'_0)\frac{\partial h'}{\partial x'} + (v'_1 + v'_0)\frac{\partial h'}{\partial y'}, \tag{26}$$

où $w'_1 - w'_0$ est une vitesse relative dans la direction de l'épaisseur entre deux parois. D'où on peut trouvé la dérivé temporelle partielle :

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = w'_1 - w'_0 - (\boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}'_0) \cdot \nabla' h \tag{27}$$

En mettant les équations (23) et (27) dans (25), on obtient l'équation de Reynolds normalisée pour un fluide incompressible :

$$\boxed{\nabla' \cdot \left(\frac{h'^3}{12}\nabla' p'\right) = w'_1 - w'_0 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}'_0) \cdot \nabla' h'.} \tag{28}$$

Notons que c'est une équation pour un champ scalaire de pression à trouver dans le "plan" d'écoulement $p'(x', y')$. Le champs de vitesse est complétement défini par le gradient de pression et la vitesse des parois (22). En se débarrassant de la normalisation : $\nabla' = L\nabla$, $h' = h/h_0$, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}/U_0$, $w' = wL/(U_0h_0)$, $p' = ph_0^2/(\mu U_0 L)$, on obtient l'équation de Reynolds classique pour un fluide incompressible de viscosité μ :

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{h^3}{12\mu}\nabla p\right) = w_1 - w_0 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0) \cdot \nabla h.} \tag{29}$$